



# トレーサー試験の理論解析

---

令和元年10月18日

株式会社ダイヤコンサルタント

菱谷 智幸



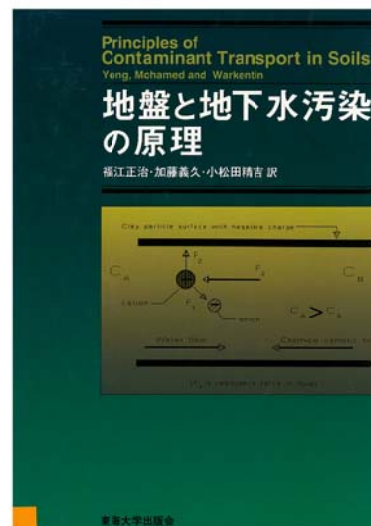
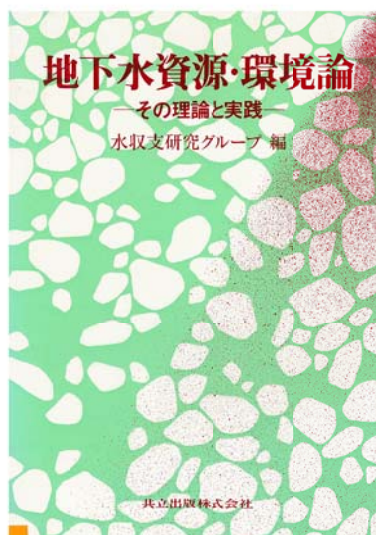
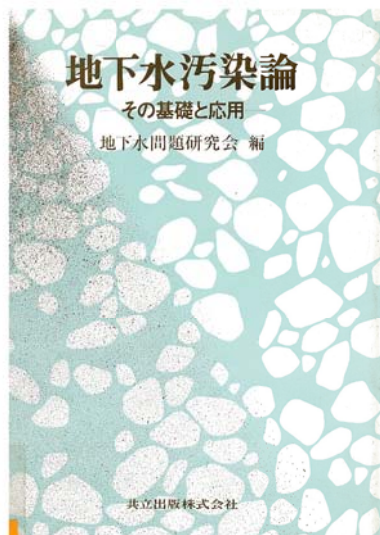
## はじめに

---

- 日本語の教科書例
- トレーサー試験の目的
- 移流分散現象
- 移流分散特性
- 移流分散方程式の理論解
- 解析例

# 日本語の教科書例

- 土壌・地下水汚染関連の本(1)1991、1993、1995

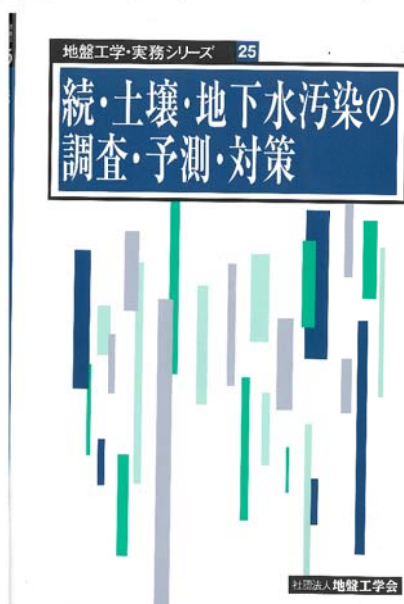
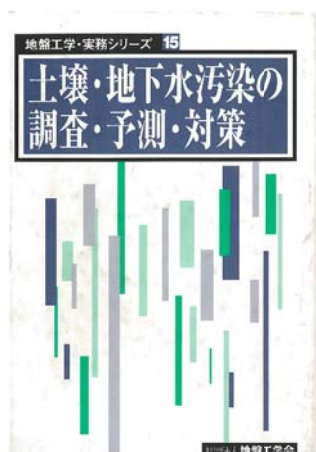


2019/10/18

3

# 日本語の教科書例

- 土壌・地下水汚染関連の本(2)2002、2008



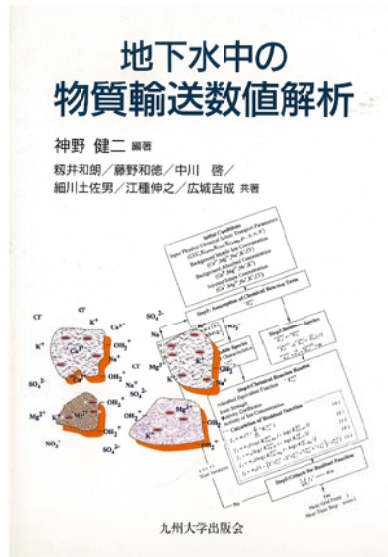
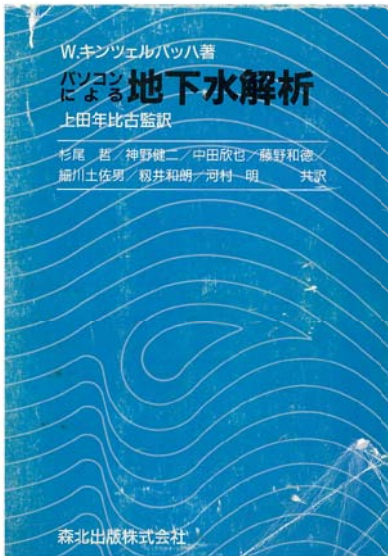
理論解が  
整理され  
ている本

2019/10/18

4

# 日本語の教科書例

## ■ 地下水解析の本(1)1990、2001、2003

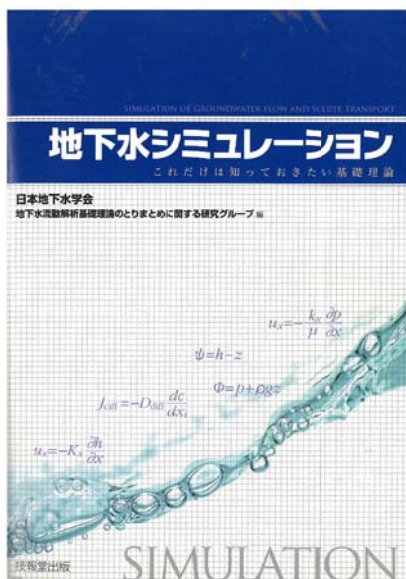


2019/10/18

5

# 日本語の教科書例

## ■ 地下水解析の本(2)2010、2009



日本語で書かれた  
トレーサー試験の本

2019/10/18

6





## トレーサー試験の目的

- 地下水の動きを見る
  - 湧水の源(泉、トンネル、斜面・・・)
  - 水みち探査
  - 止水層の連続性確認
  - 地下水流動保全対策の確認
  - 地下水涵養量の推定
  
- 汚染物質の移動速度(実流速、平均間隙流速)
- 汚染物質の移動先

2019/10/18

7



## 移流分散現象

- 地下水に(汚染)物質が**溶けた状態**で拡大するそのメカニズムを、いくつかの特性に分けて考えて、これを合算する。
- その主な特性が、**移流と分散**(および**拡散**)

2019/10/18

8



## 移流分散現象(水溶性地下水汚染現象)

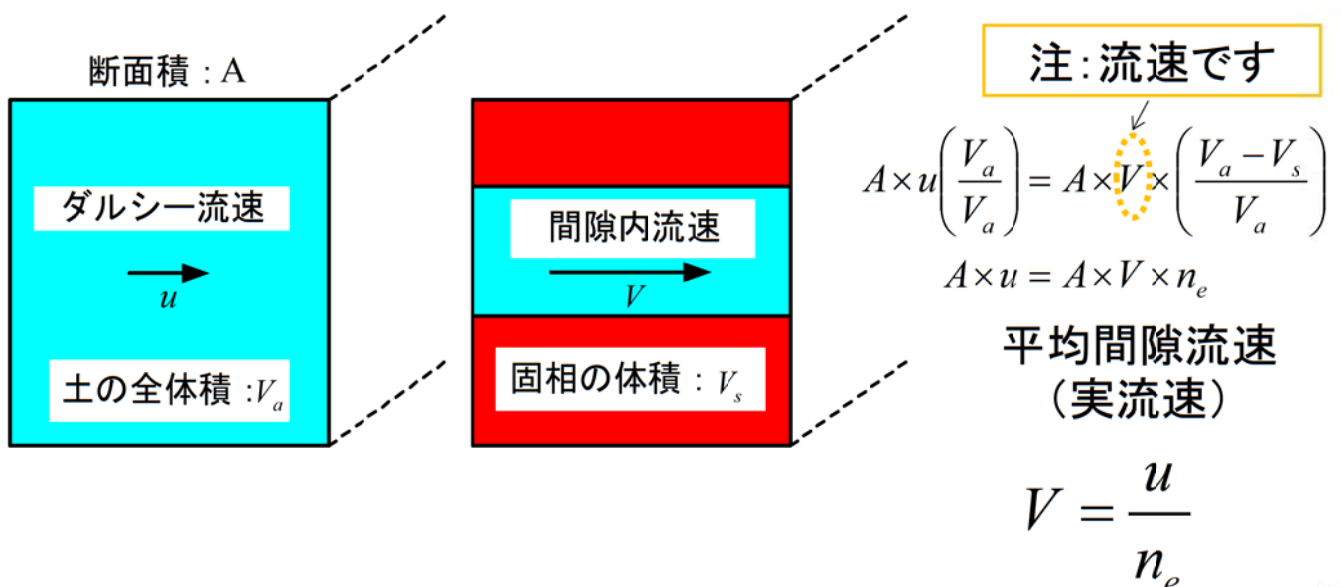
- 移流 : advectionとかconvection
  - 地下水に溶け込んだ汚染物質が流れに乗って移動する現象
- 拡散 : diffusion
  - ブラウン運動によって, 汚染物質が徐々に広がることで濃度が低くなっていく現象
- 分散 (拡散現象への見立て) dispersion
  - 多孔質媒体である地盤内を地下水が移動する際, 地下水流速の不均質性によって汚染濃度が空間的に広げられる (濃度が低下) 現象

2019/10/18

9

## 移流分散現象(実流速／平均間隙流速)

- 移流による平均移動速度 : 平均間隙流速

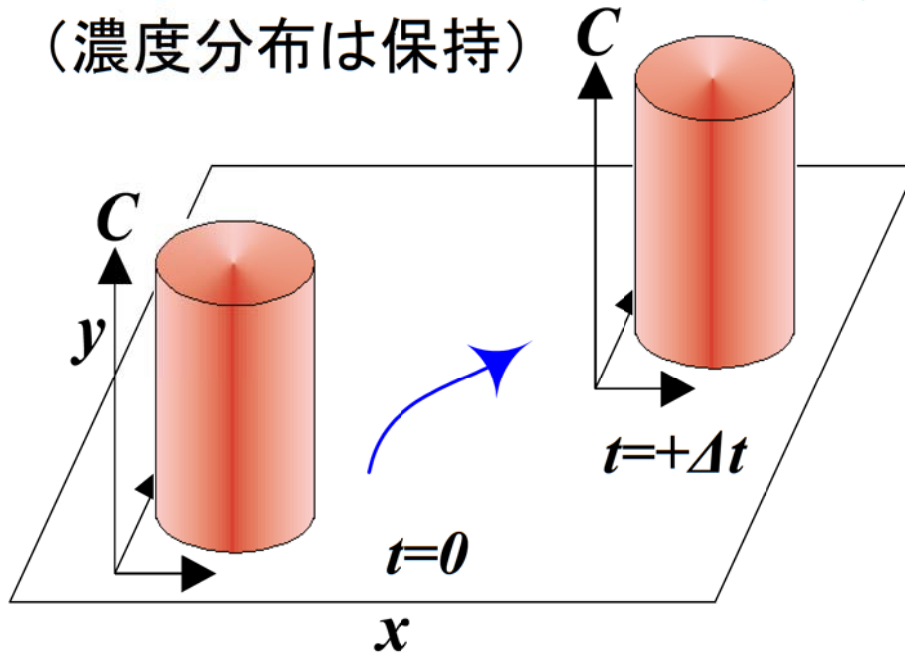


2019/10/18

10

# 移流分散現象 (移流現象)

- 地下水の流れとともに汚染物質が移動 (濃度分布は保持)

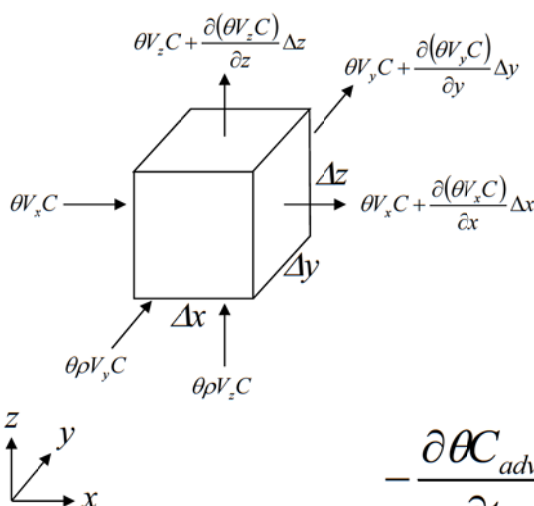


2019/10/18

11

# 移流分散現象 (移流分散方程式)

- 移流に伴う濃度変化 ( $\Delta C_{adv}$ ) を考える



x方向の変化量

$$\left[ \frac{\partial(\theta V_x C)}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \right]$$

x,y,z方向の変化量の合計

$$\begin{aligned}
 & -(\theta \Delta C_{adv}) \Delta x \Delta y \Delta z \\
 & = \Delta t \left\{ \frac{\partial(\theta V_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(\theta V_y C)}{\partial y} + \frac{\partial(\theta V_z C)}{\partial z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned}$$

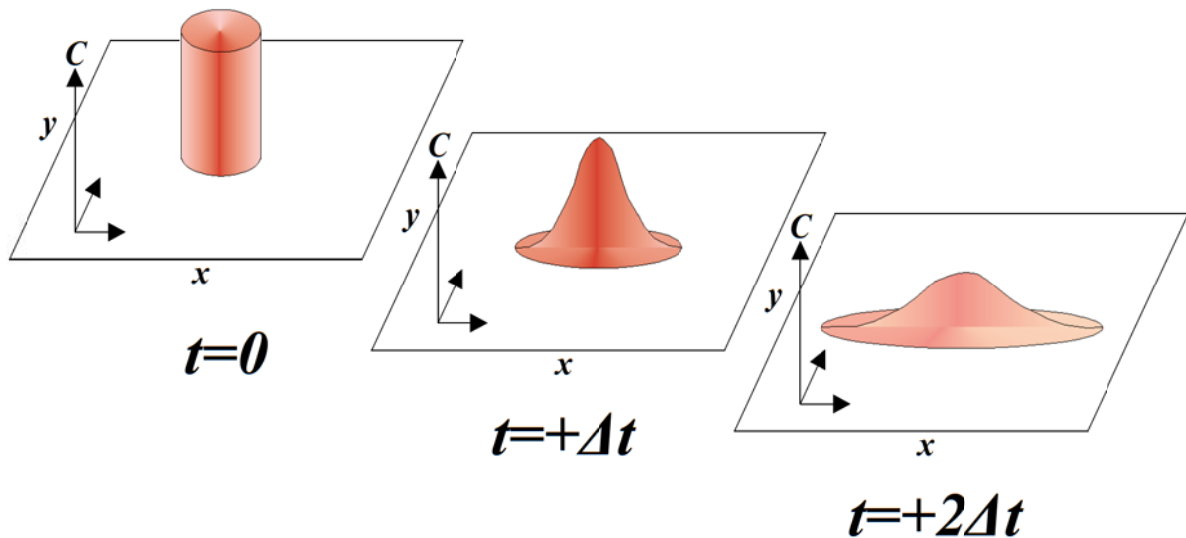
$$-\frac{\partial \theta C_{adv}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\theta V_x C) + \frac{\partial}{\partial y} (\theta V_y C) + \frac{\partial}{\partial z} (\theta V_z C)$$

2019/10/18

12

## 移流分散現象(拡散現象)

- ブラウン運動によって汚染濃度が広がる現象  
着色した円筒体もスナフキン? 帽体も体積は皆同じ



2019/10/18

13

## 移流分散現象(移流分散方程式)

- フィックの法則では、拡散により物質は多い(濃度が高い)方から少ない(濃度が低い)方へと移動し、濃度フラックスはその面の法線方向の濃度勾配に比例  
(比例定数を拡散係数 $[L^2T^{-1}]$ と呼ぶ)するということである

$$J_{diff} = -D_{diff} \left( \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

これを $x, y, z$ 方向に分離し、 $D_{diff} = \alpha_m$  (分子拡散係数)

$$\begin{pmatrix} J_{x,diff} \\ J_{y,diff} \\ J_{z,diff} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2019/10/18

14



## 移流分散現象(移流分散方程式)

- $J_{diff}$ の単位(次元)を考えてみましょう

$$J_{diff} = -D_{diff} \left( \frac{dC}{dx} + \frac{dC}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

$$\begin{aligned} D_{diff} [L^2/T] \quad C [M/L^3] \\ \rightarrow [J_{diff}] &= [L^2/T \cdot M/L^3 \cdot 1/L] \\ &= [M/L^2T] \end{aligned}$$

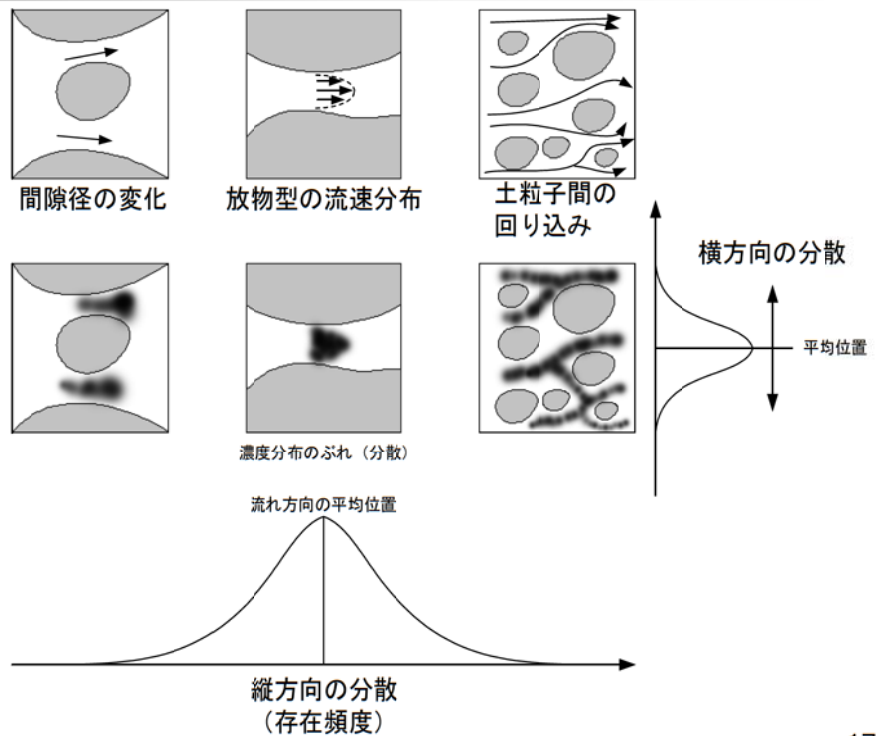
単位時間あたりに単位面積を通過する質量

## 移流分散現象(移流分散方程式)

- 微視的分散と巨視的分散に分けて考えるが、これらはその要因やメカニズムは異なるものの . . .
- 結果出てくる濃度分布が拡散現象に酷似
- **拡散みたいに濃度勾配との関係**として扱ってもいいんじゃないの！

# 移流分散現象(微視的分散)

- 微視的分散
  - 拡散現象と似ているので、拡散と同じように扱っている

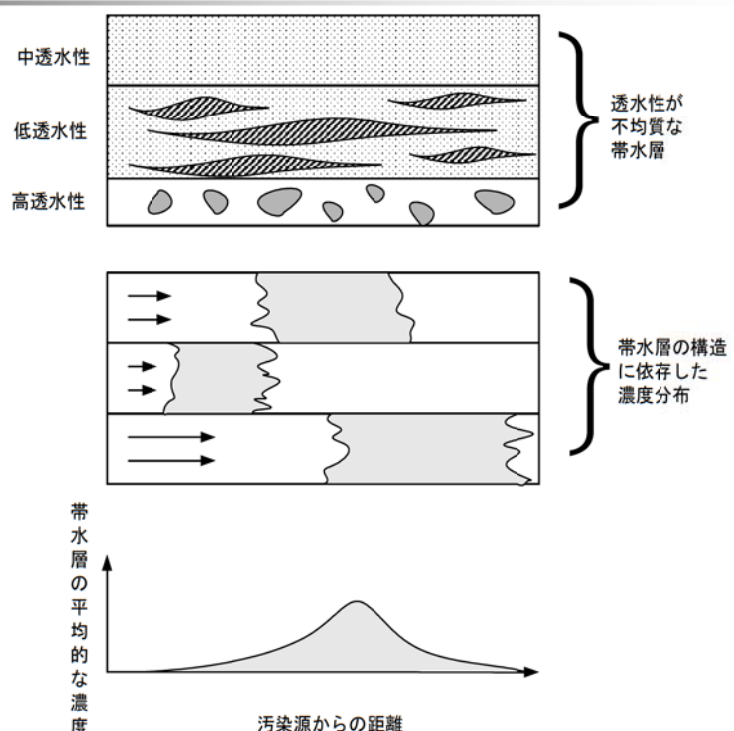


2019/10/18

17

# 移流分散現象(巨視的分散)

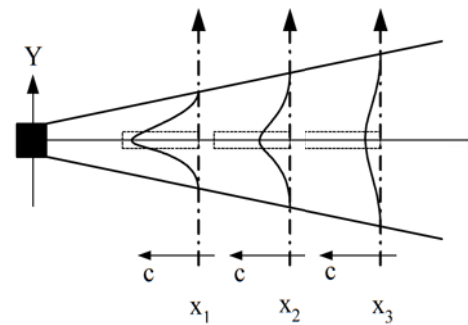
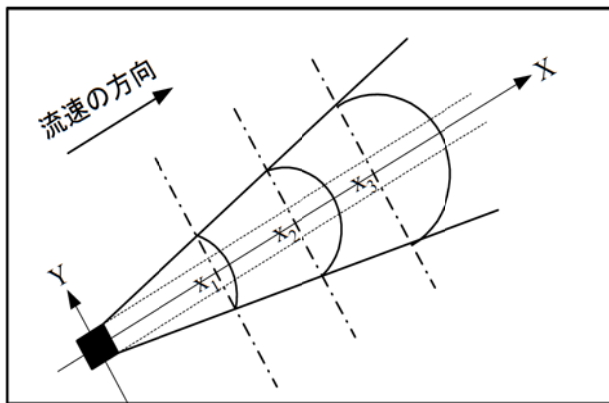
- 巨視的分散
  - 帯水層構造のように地盤の透水性の不均質性による濃度の広がり



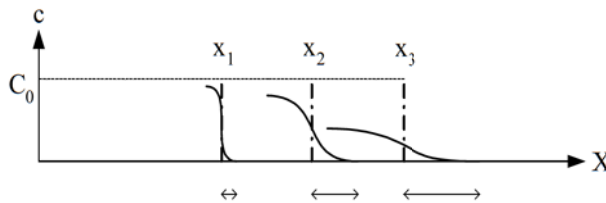
2019/10/18

18

# 移流分散現象(縦分散・横分散)



横分散による流速直交方向への濃度分布



横分散による流速方向への濃度分布

## ■ 縦分散

- 流れの方向に広がる現象

## ■ 横分散

- 流れに直交する方向に広がる現象

2019/10/18

19

# 移流分散現象(移流分散方程式)

- 分散テンソルはBear (ベアー) によって分子拡散係数も含めた流速に依存する次式によって表されている

$$D_{ij} = \alpha_T \|V\| \delta_{ij} + (\alpha_L - \alpha_T) \frac{V_i V_j}{\|V\|} + \alpha_m \tau \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

**分散**

$\alpha_L$ : 縦分散長[L]、 $\alpha_T$ : 横分散長[L]

$\alpha_m$ : 分子拡散係数[L<sup>2</sup>/T]

$V$ : 平均間隙流速ベクトル[L/T]

$\tau$ : 屈曲率[-]

$\delta_{ij}$ : クロネッカのデルタ[-]

$\| \cdot \|$ : スカラー量

**拡散**

分散を拡散と同じように扱えるなら、ここで合算してしまえ！

2019/10/18

20



# 移流分散現象(移流分散方程式)

- 分散テンソルを書き下してみると

$$\begin{aligned}
 D_{xx} &= \alpha_L \frac{V_x V_x}{\|V\|} + \alpha_T \frac{V_y V_y}{\|V\|} + \alpha_T \frac{V_z V_z}{\|V\|} + \alpha_m \tau & x\text{軸方向にだけ水が流れている場合は、} V_y=0, V_z=0, \\
 D_{yy} &= \alpha_T \frac{V_x V_x}{\|V\|} + \alpha_L \frac{V_y V_y}{\|V\|} + \alpha_T \frac{V_z V_z}{\|V\|} + \alpha_m \tau & \|V\| = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = |V_x| \\
 D_{zz} &= \alpha_T \frac{V_x V_x}{\|V\|} + \alpha_T \frac{V_y V_y}{\|V\|} + \alpha_L \frac{V_z V_z}{\|V\|} + \alpha_m \tau & \text{となるため、} \\
 D_{xy} = D_{yx} &= (\alpha_L - \alpha_T) \frac{V_x V_y}{\|V\|} & D_{xx} = \alpha_L V_x + \alpha_m \tau \\
 D_{yz} = D_{zy} &= (\alpha_L - \alpha_T) \frac{V_y V_z}{\|V\|} & D_{yy} = \alpha_T V_x + \alpha_m \tau \\
 D_{zx} = D_{xz} &= (\alpha_L - \alpha_T) \frac{V_z V_x}{\|V\|} & D_{zz} = \alpha_T V_x + \alpha_m \tau \\
 & & D_{xy} = D_{yx} = 0 \\
 & & D_{yz} = D_{zy} = 0 \\
 & & D_{zx} = D_{xz} = 0
 \end{aligned}$$

2019/10/18

21

# 移流分散現象(移流分散方程式)

- 分子拡散と同様に、分散により単位時間に物質が単位面積を通して移動する量(濃度フラックス)を以下のように定義する

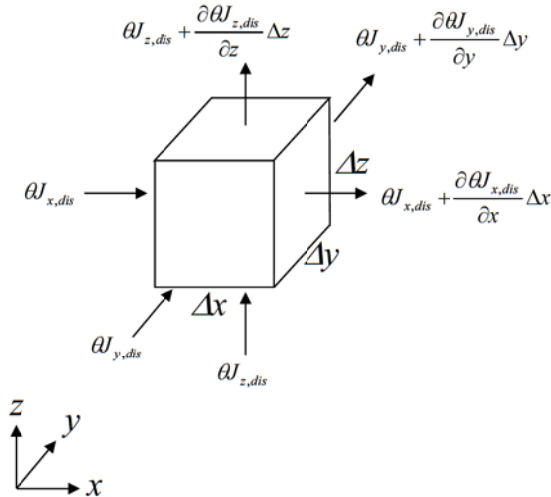
$$\begin{pmatrix} J_{x,dis} \\ J_{y,dis} \\ J_{z,dis} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2019/10/18

22

# 移流分散現象 (移流分散方程式)

■ 機械的な濃度の広がりの程度を拡散係数と同様に考え、分散係数Dとする



$$\left[ \frac{\partial \theta J_{x,dis}}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \right]$$

x,y,z方向の変化量の合計

$$-(\theta \Delta C_{dis}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \Delta t \left\{ \frac{\partial \theta J_{x,dis}}{\partial x} + \frac{\partial \theta J_{y,dis}}{\partial y} + \frac{\partial \theta J_{z,dis}}{\partial z} \right\}$$

$$-\frac{\partial \theta C_{dis}}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \theta J_{x,dis}}{\partial x} + \frac{\partial \theta J_{y,dis}}{\partial y} + \frac{\partial \theta J_{z,dis}}{\partial z} \right]$$

$$-\frac{\partial \theta C_{dis}}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta D_x \frac{\partial C_{dis}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \theta D_y \frac{\partial C_{dis}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta D_z \frac{\partial C_{dis}}{\partial z} \right) \right]$$

2019/10/18

23

# 移流分散現象 (移流分散方程式)

■ ここまでの、移流と分散の“入・出・残”をまとめると以下となる

汚染物  
貯留項

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \theta D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta D_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

分散項

$$- \left[ \frac{\partial(\theta V_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(\theta V_y C)}{\partial y} + \frac{\partial(\theta V_z C)}{\partial z} \right] + Q_c$$

汚染物湧  
出/注入

移流項

2019/10/18

24

## 移流分散現象 (移流分散方程式)

- 汚染物質が地盤中の間隙を移動する際、間隙への吸着や脱着現象が起こる。これにより汚染物質の移動が地下水の移動速度に比較して遅れる現象を取り扱うため、簡易的に移流分散方程式の時間項に掛かる係数としてR (遅延係数 : retardation factor) として用いている

$$R = \left( 1 + \frac{\rho_d}{\theta} K_d \right)$$

中野政詩他(1995)

R: 遅延係数  
 $K_d$ : 分配係数  
 $\rho_d$ : 土の乾燥密度  
 $\theta$ : 体積含水率

2019/10/18

25

## 移流分散現象 (移流分散方程式)

- 汚染物質が化学反応や微生物分解等で別の物質に変化または消滅するような場合、1次反応と考えると次式のように濃度が時間的に減衰する事象と等価として取り扱うことができる

一応解いてみました

$$\frac{d(\theta C)}{\theta C} = -\lambda dt$$

$$\log_e(\theta C) = -\lambda t + a$$

$$t = 0 \rightarrow (\theta C) = (\theta C)_0$$

$$a = \log_e(\theta C)_0$$

$$\log_e(\theta C) = -\lambda t + \log_e(\theta C)_0$$

$$(\theta C) = (\theta C)_0 \exp(-\lambda t)$$

$$\frac{(\theta C)}{(\theta C)_0} = \exp(-\lambda t)$$

2019/10/18

$$\frac{d(\theta C)}{dt} = -\lambda \theta C$$

$\lambda$ : 減衰(あるいは崩壊)定数  
 $\theta$ : 体積含水率

減衰率(or速度)はその時の濃度に比例し、この比例定数が $\lambda$ である

核種の半減期Tは以下のように考えます  
 半減期の定義:  $(\theta C)/(\theta C)_0 = \exp(-\lambda T) = 0.5$   
 $\rightarrow T = -\log_e(0.5)/\lambda = \log_e(2)/\lambda$   
 $(\theta C)/(\theta C)_0 = \exp(-\lambda t) = \{\exp(-\lambda T)\}^{t/T} = (0.5)^{t/T}$

26



## 移流分散現象 (移流分散方程式)

$$\theta \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_d S)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) - \theta V_i \frac{\partial C}{\partial x_i} - \theta \lambda C - \lambda \rho_d S + Q_c, j=1,2,3$$

土粒子に吸着(から脱着)する土粒子収着分の時間変化分配係数 $K_d$ を使って、土粒子の汚染物濃度 $S$ は  
 $S = K_d \rho C$

減衰(1次変化)によって水中と土中から単位時間当たり減ずる汚染物量

$$\theta \lambda C + \lambda \rho_d S$$

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_d S)}{\partial t} &= \theta \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_d K_d C)}{\partial t} &= \left( 1 + \frac{\rho_d K_d}{\theta} \right) \theta \lambda = R \theta \lambda \\ &= \left( 1 + \frac{\rho_d K_d}{\theta} \right) \theta \frac{\partial C}{\partial t} = R \theta \frac{\partial C}{\partial t} \end{aligned}$$

## 移流分散現象 (移流分散方程式)

$$\theta R \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) - \theta V_i \frac{\partial C}{\partial x_i} - \theta R \lambda C + Q_c \quad i,j=1,2,3$$

$$\begin{aligned} \theta R \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta D_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{xz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( \theta D_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{yz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta D_{zx} \frac{\partial C}{\partial x} + \theta D_{zy} \frac{\partial C}{\partial y} + \theta D_{zz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &\quad - \theta V_x \frac{\partial C}{\partial x} - \theta V_y \frac{\partial C}{\partial y} - \theta V_z \frac{\partial C}{\partial z} - \theta R \lambda C + Q_c \end{aligned}$$

# 移流分散特性(有効間隙率)

## 【浸透流解析における出力データ例】

物性パラメータ	記号	単位
圧力水頭	$P$	L
流量	$Q$	$L^3/T$
飽和度	$S_w$	-
ダルシー流速	$u$	L/T
実流速	$V$	L/T

移流分散解析に必要

出力データに必要	パラメータ	概要
有効間隙率	$n_e$	実流速を出力するために有効間隙率が必要 $V = \frac{u}{n_e}$

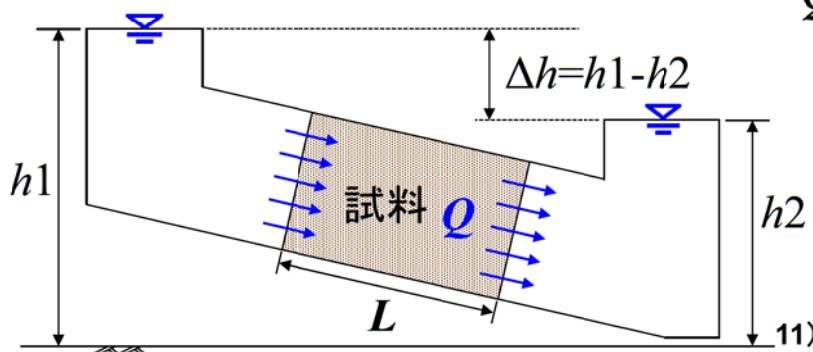
2019/10/18

29

# 移流分散特性(有効間隙率)

## 【ダルシーの法則】

$$Q = Au = AK \frac{\Delta h}{L}$$



$Q$ : 流量 [ $L^3/T$ ]  
 $A$ : 試料の断面積 [ $L^2$ ]  
 $K$ : 透水係数 [ $L/T$ ]  
 $\Delta h$ : 水頭差 [ $L$ ]  
 $L$ : 試料の長さ [ $L$ ]  
 $u$ : ダルシー流速 [ $L/T$ ]

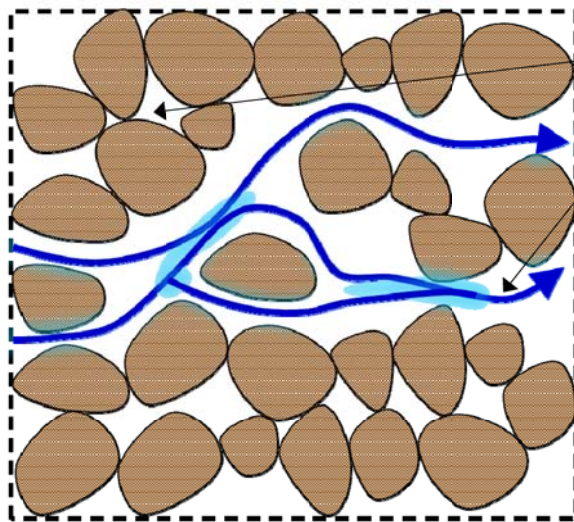
ダルシー流速は多孔間隙を流れる浸透流の真の流速ではなく、浸透流が全断面を平均的に流れると仮定したときの見かけの流速である。

11) 藤縄克之(2010): 環境地下水学, 共立出版株式会社, p.58

2019/10/18

30

## 移流分散特性(有効間隙率)



水が動けない間隙

水が動ける間隙

全体の体積:  $V$

間隙の体積:  $V_v$

水が動ける間隙の体積:  $V_v'$

間隙率:  $n = V_v / V$

有効間隙率:  $n_e = V_v' / V$

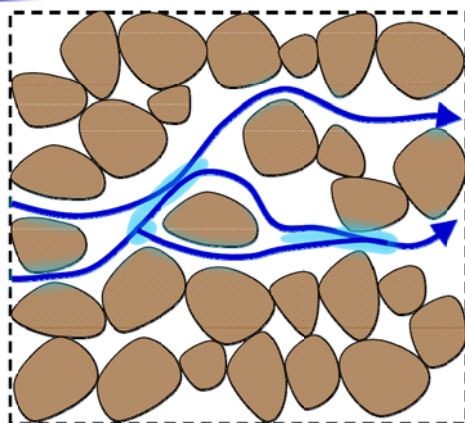
### 【有効間隙率】

間隙のうち水が動ける部分のみを有効とした間隙率

2019/10/18

31

## 移流分散特性(有効間隙率)



【ダルシー流速:  $u = Q/A$ 】

全断面が流通可能と仮定したときの流速

【実流速:  $V = u / n_e$ 】

有効間隙のみが流通可能のときの流速

有効間隙率は、**実流速**を求めるのに必要である。  
実流速は移流分散解析に必要なパラメータとなる。

➡ 測定手法がまだ確立されていない、設定が困難なパラメータの一つ。今後の研究が望まれる。

2019/10/18

32



# 移流分散特性(有効間隙率)

地層	間隙率 $n$ [%]	有効間隙率 $n_e$ [%]
沖積礫層	35	15
細砂	35	15
砂丘砂層	30~35	20
泥粘土質層	45~50	15~20
洪積砂礫層	30	15~20
砂層	30~40	30
一口層	50~70	20
泥層粘土層	50~70	5~10

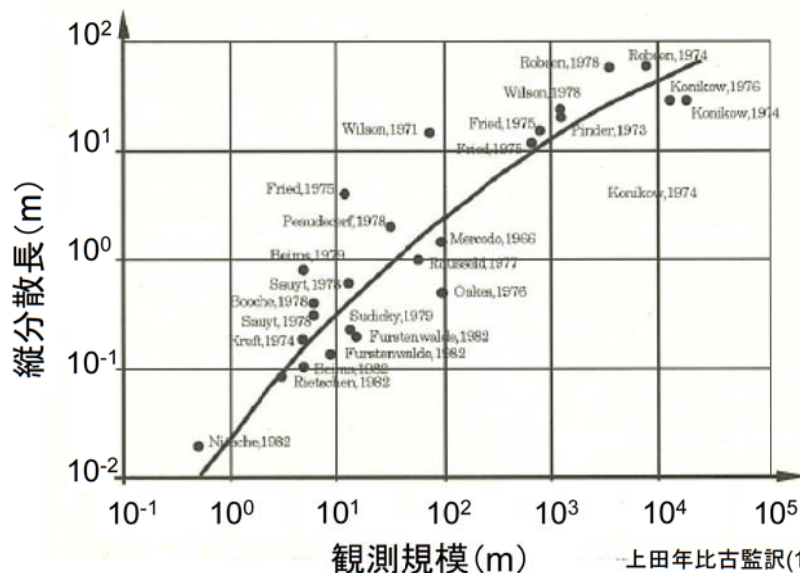
水理公式集(1974)

2019/10/18

33

# 移流分散特性(分散長( $\alpha_L, \alpha_T$ ))

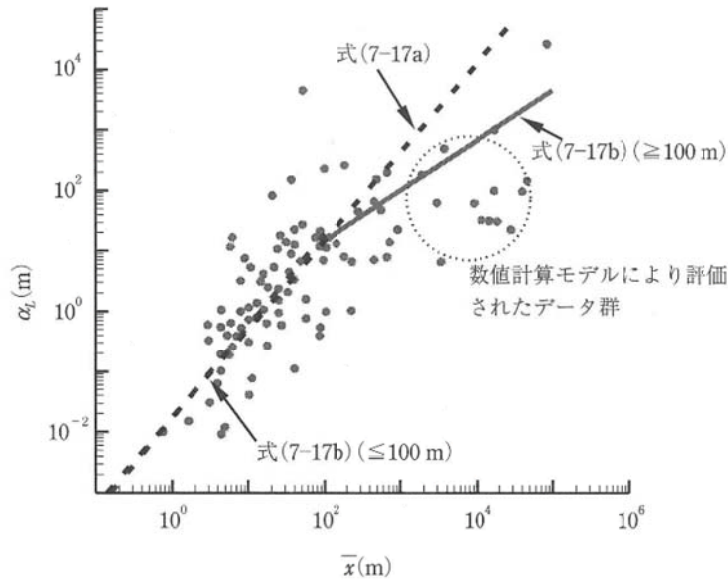
一般に分散長は、巨視的な地盤の不均質性による流速のばらつきにより、移行距離に依存するため、モデルスケールが大きいほど分散長も大きくなる。



2019/10/18

34

# 移流分散特性(分散長( $\alpha_L, \alpha_T$ ))



$$\alpha_L = 0.0175x^{-1.46} \quad (7-17a)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_L &= 0.0169x^{-1.53} \quad (\bar{x} \leq 100m) \\ \alpha_L &= 0.32x^{-0.83} \quad (\bar{x} \geq 100m) \end{aligned} \right\} (7-17b)$$

2019/10/18

地下水のトレーサー試験(2009) pp.163-164

35

# 移流分散特性(分子拡散係数)

表 3.18 分子拡散係数<sup>29)</sup>

カチオン	$D_0$ in ( $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ )	アニオン	$D_0$ in ( $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ )
H <sup>+</sup>	93.1	OH <sup>-</sup>	52.7
Na <sup>+</sup>	13.3	F <sup>-</sup>	14.6
K <sup>+</sup>	19.6	Cl <sup>-</sup>	20.3
Rb <sup>+</sup>	20.6	Br <sup>-</sup>	20.1
Cs <sup>+</sup>	20.7	HS <sup>-</sup>	17.3
		HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	11.8

分子拡散係数は、概ね $10^{-9} \sim 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ の範囲にある

2019/10/18

地下水シミュレーション(2010) pp.97

36

# 移流分散方程式の理論解

- 初期条件と境界条件により幾つかの理論式がある
  - 基本的に正規分布の濃度分布
  - 誤差関数（余誤差関数）や指数関数で示されるものもあるが、数値積分が必要な解もある。
  - 瞬間点源の式は意外と使いづらい（と個人的に思う）
- 理論解をまとめた資料例
  - Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation : M.Th.van Genuchten & W.J.Alves 1982, U.S.Department of Agriculture, Technical Bulletin No.1661, 151.
    - <http://naldc.nal.usda.gov/download/CAT82780278/PDF/naldc.nal.usda.gov/download/CAT82780278/PDF>
  - 続・土壌・地下水汚染の調査・予測・対策、地盤工学・実務シリーズ25、地盤工学会、付録の章 (pp.141-144)、2008.

2019/10/18

37

# 理論解のための特殊関数

- Abramobitz&Stegun : Handbook of mathematical functions、Dover Publ.(1972)

- 誤差関数(erf: error func.)と余誤差関数(erfc : complementary···)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+1)}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \exp(-x^2) + \varepsilon_1(x) \quad t = 1/(1+px)$$

$$|\varepsilon_1(x)| \leq 1.5 \times 10^{-7} \quad p = 0.3275911 \quad a_1 = 0.254829592 \quad a_2 = -0.284496736$$

$$a_3 = 1.421413741 \quad a_4 = -1.453152027 \quad a_5 = 1.061405429$$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{1}{[1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6]^6} + \varepsilon_2(x)$$

$$|\varepsilon_2(x)| \leq 3 \times 10^{-7} \quad b_1 = 0.0705230784 \quad b_2 = 0.0422820123 \quad b_3 = 0.0092705272$$

$$b_4 = 0.0001520143 \quad b_5 = 0.0002765672 \quad b_6 = 0.0000430638$$

2019/10/18

38

# 1次元理論解(1)定常入力

- 支配方程式  $R \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x}$
- 初期条件  $C(x, t) = 0 \quad x > 0$
- 境界条件  $C(0, t) = C_0, \quad \frac{\partial C(\infty, t)}{\partial x} = 0$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{Rx - Vt}{\sqrt{4DRt}} \right] + \frac{1}{2} \exp \left( \frac{Vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left[ \frac{Rx + Vt}{\sqrt{4DRt}} \right]$$

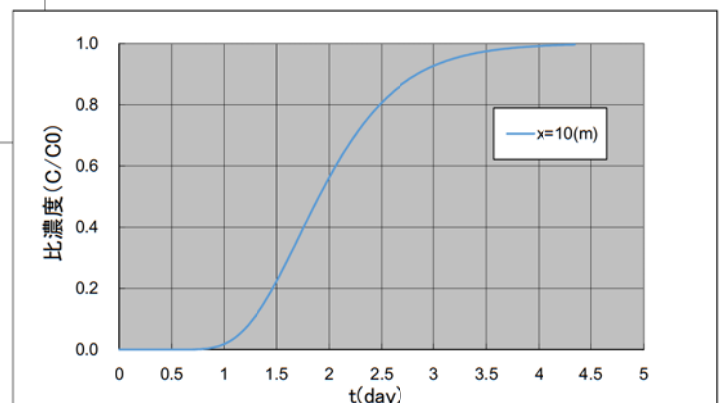
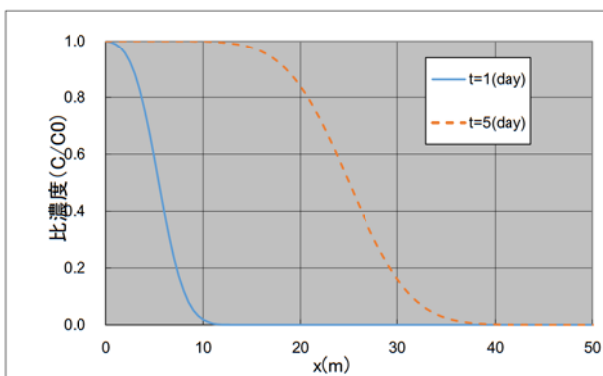
*erfc*: 余誤差関数  
 $= 1 - \operatorname{erf}$  (*erf*: 誤差関数)

続・土壌・地下水汚染の調査・予測・対策、地盤工学・実務シリーズ25、地盤工学会、付録の章(pp.141-144)、2008.

2019/10/18

39

# 1次元理論解(1)定常入力



2019/10/18

40



# 1次元理論解(2)パルス入力

- 支配方程式

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x}$$

- 初期条件

$$C_\delta(x, 0) = \frac{\delta(x)M}{n_e m w R} \quad \int_{-\infty}^{\infty} n_e m w R C_\delta(x, 0) dx = \Delta M$$

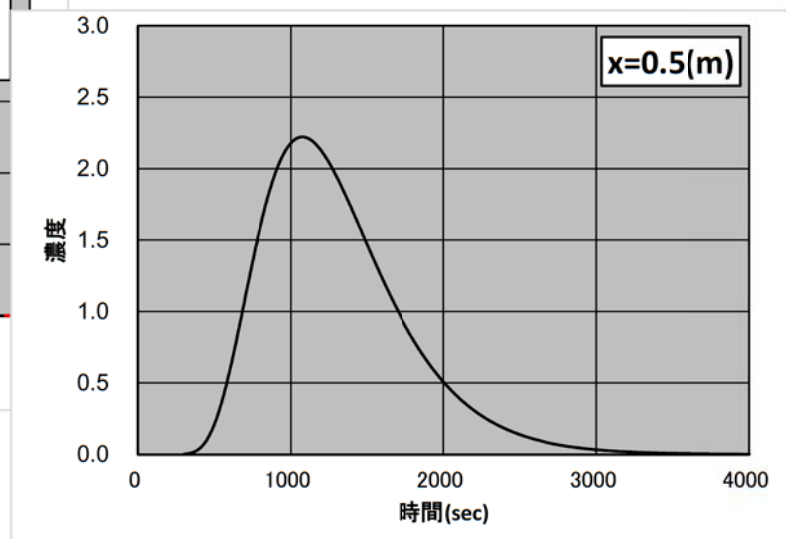
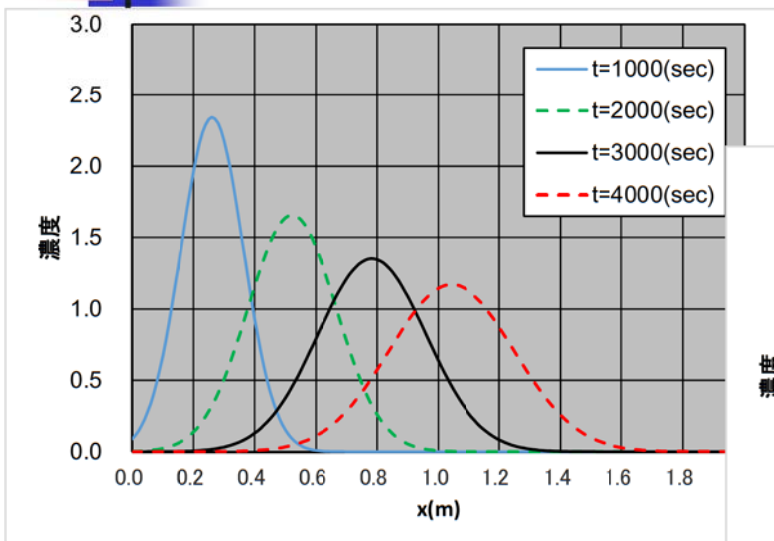
厚さ $m$ 、幅 $w$ 、 $\delta(x)$  : ディラックのデルタ関数

- 境界条件

$$C(\pm \infty, t) = 0$$

$$C(x, t) = \frac{\Delta M}{n_e m w \sqrt{4\pi D R t}} \exp\left[-\frac{(Rx - Vt)^2}{4DRt}\right]$$

# 1次元理論解(2)パルス入力



## 2次元理論解矩形入力

- 支配方程式 
$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y}$$
- 初期条件 
$$C(x, y, 0) = 1 \quad X_c - a \leq x \leq X_c + a, \quad Y_c - b \leq y \leq Y_c + b$$
  

$$C(x, y, 0) = 0 \quad x < X_c - a, \quad X_c + a < x, \quad y < Y_c - b, \quad Y_c + b < y$$
- 境界条件 
$$C(-\infty, x, t) = C(\infty, x, t) = C(-\infty, y, t) = C(\infty, y, t) = 0$$
  

$$C(x, y, t) = \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{a - (x - X_c) + V_x t}{\sqrt{4D_x t}} \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{a + (x - X_c) - V_x t}{\sqrt{4D_x t}} \right] \right\}$$
  

$$\bullet \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{b - (y - Y_c) + V_y t}{\sqrt{4D_y t}} \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{b + (y - Y_c) - V_y t}{\sqrt{4D_y t}} \right] \right\}$$

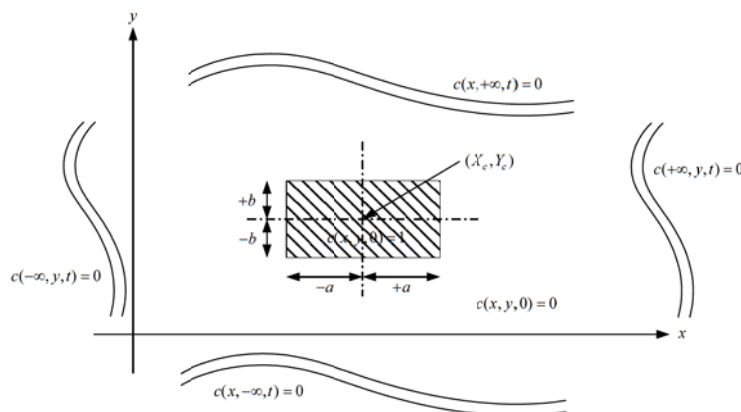
2019/10/18 続・土壌・地下水汚染の調査・予測・対策、地盤工学・実務シリーズ25、地盤工学会、付録の章(pp.141-144)、2008.

43

## 2次元理論解矩形入力

- 初期条件 
$$C(x, y, 0) = 1 \quad X_c - a \leq x \leq X_c + a, \quad Y_c - b \leq y \leq Y_c + b$$
  

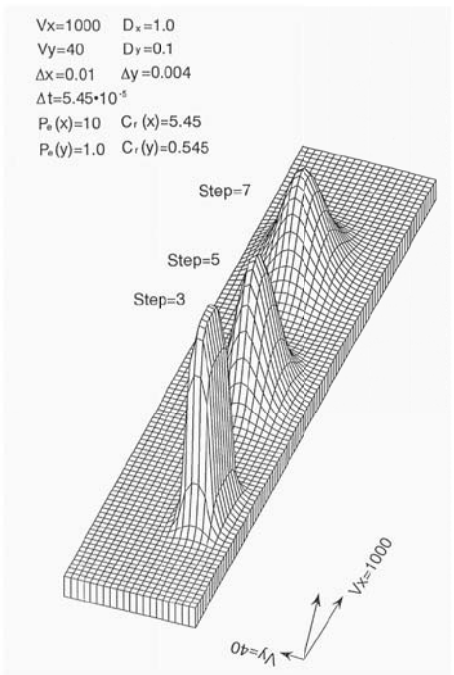
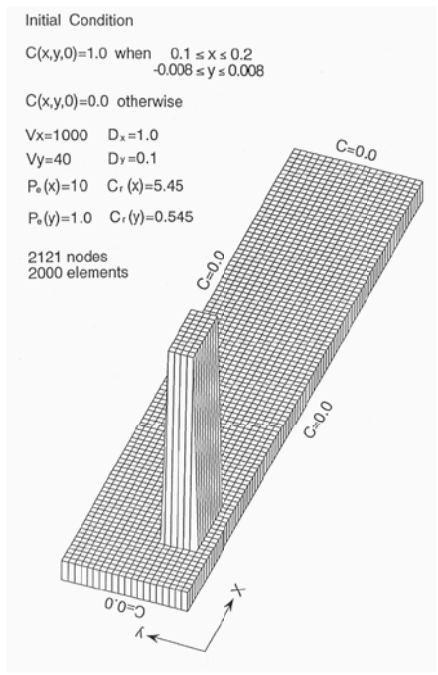
$$C(x, y, 0) = 0 \quad x < X_c - a, \quad X_c + a < x, \quad y < Y_c - b, \quad Y_c + b < y$$



2019/10/18

44

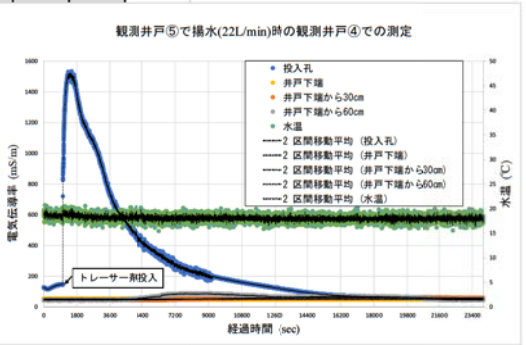
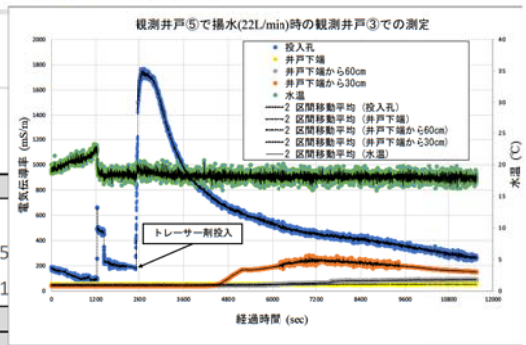
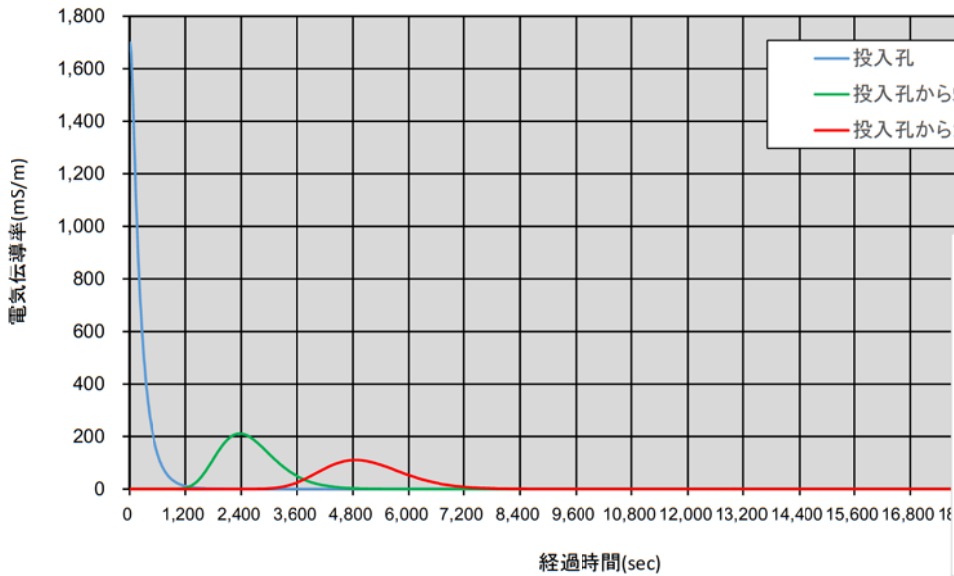
# 2次元理論解矩形入力



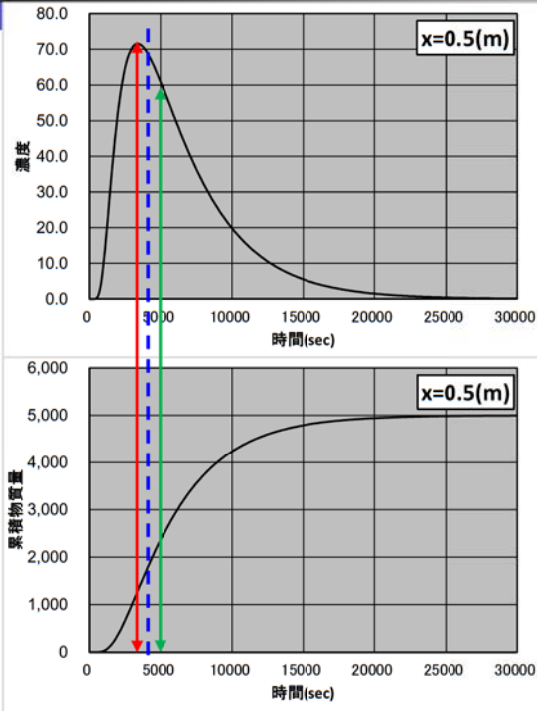
# 2次元理論解矩形入力解析例

水平方向分散長0.04m、鉛直方向分散長0.004m、拡散係数 $5E-10m^2/sec$

観測井戸⑤で揚水(22L/min)時 実流速 $2.0E-4(m/sec)$



# 簡易評価方法



## ■ 簡易評価式

$$V = R \frac{Rx}{t_{effective}} = \frac{2Rx}{t_{peak} + t_{median}}$$

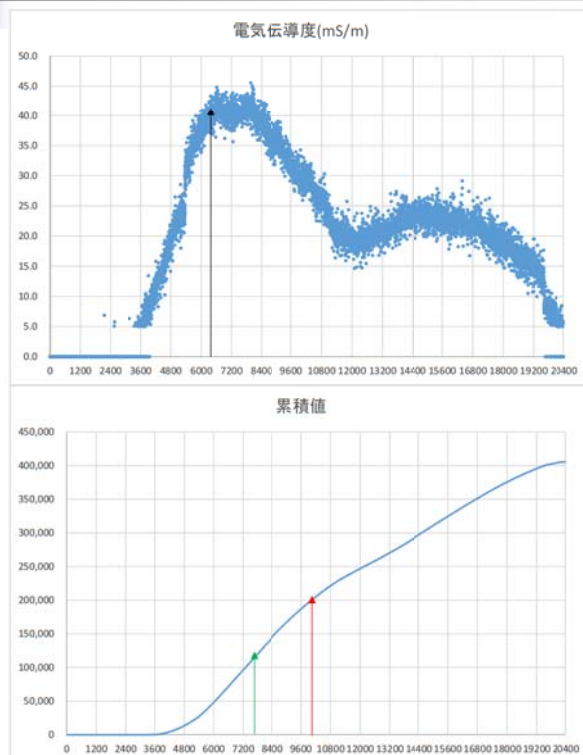
- ←→ ■  $t_{peak}$
- ←→ ■  $t_{median}$
- - - ■  $t_{effective}$

2019/10/18

地下水のトレーサー試験(2009) pp.184-190

47

# 簡易評価方法



ピーク時間: 7,076sec  
 累積値50%時間: 10,139sec  
 移行距離1m  
 実流速: 1.2E-4(m/sec)

ピーク時間: 7,076sec  
 累積値50%時間: 8,000sec  
 移行距離1m  
 実流速: 1.3E-4(m/sec)

2019/10/18

48